Уместо да имамо 6 ј-на са 6 непознатих.
(нека виша алгеб)

Пошто нам је остало 6 диференцијалних ј-на, морамо да одредимо граничне услове, и то:
1) по силама (НАЈВИШЕ 3)
или 2) по померањима (НАЈМАЊЕ 3)

I СТАТИЧКИ ОДРЕЂЕНИ ШТАПОВИ

{ 3 гранична услова по силама
{ 3 гранична услова по померањима

- одређивање сила у пресецима одвојен од одређ. померања (па 2 проблема се могу независно решити)

II СТАТИЧКИ НЕОДРЕЂЕНИ ШТАПОВИ

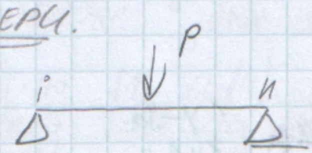
{ гранични услови по силама < 3
{ гранични услови по померањима > 3

нема довољно делова по силама, а има вишак по померањима, па силе изражавамо преко померања тачака штапа.

=> ово се односи и на носаче, не само на штапове!

ПРИМЕРИ.

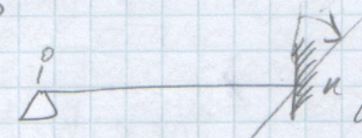
1) $M_i = 0$, $u_i = 0$, $v_i = 0$



$M_n = 0$, $H_n = 0$, $v_n = 0$

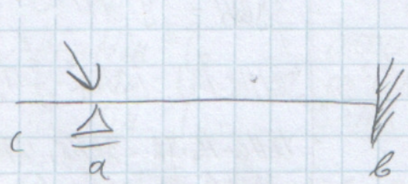
да би дошли до пом. користимо мор-максвелову аналогију.

2) $M_i = 0$, $u_i = 0$, $v_i = 0$



$u_n = 0$, $v_n = 0$, $\varphi_n = 0$

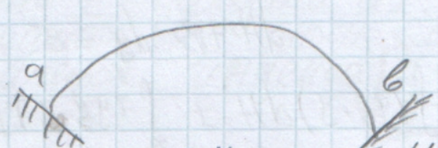
3)



$M_c = 0$, $H_c = 0$, $T_c = 0$

С.Н

4) обострано уклештен лук.



$u_a = 0$, $v_a = 0$, $\varphi_a = 0$

$u_b = 0$, $v_b = 0$, $\varphi_b = 0$

нема гр. усл. по силама

8. УСЛОВИ РАВНОТЕЖЕ ЕЛЕМЕНТА ОСЕ ШТАПА У ПРАВЦИМА ОСА СТАЛНОГ ДЕКАРТОВОГ КООРДИНАТНОГ СИСТЕМА. ИНТЕГРАЛИ УСЛОВА РАВНОТЕЖЕ И ЊИХОВО СТАТИЧКО ЗНАЧЕЊЕ. ПОЈАМ СТАТИЧКИ НЕЗАВИСНИХ ВЕЛИЧИНА ШТАПА, ОПШТЕ РЕШЕЊЕ ЗА СИЛЕ У ПРЕСЕЦИМА ШТАПА.

Услови равнотеже елемента штапа:

$$\left.\begin{aligned} &1.1.\quad dH + p_x\,dy = 0 \\ &1.2.\quad dV + p_y\,dx = 0 \\ &1.3.\quad dM + H\,dy - V\,dx = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

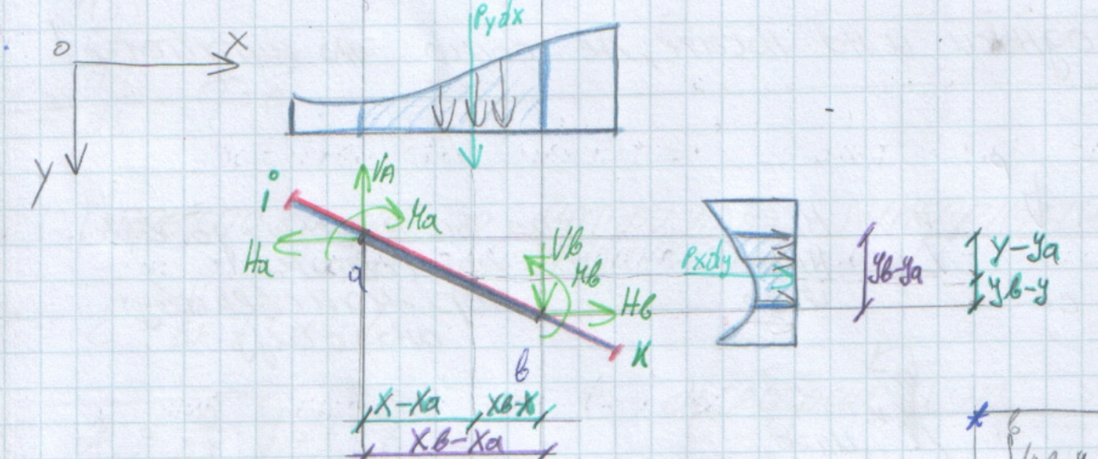
представљају систем од 3 линеарне диференцијалне ј-не првог реда са три непознате H, V, M.

систем (1) интегралимо у границама од пресека a до пресека b, па $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &2.1.\quad H_b - H_a + \int_a^b p_x\,dy = 0 \\ &2.2.\quad V_b - V_a + \int_a^b p_y\,dx = 0 \\ &2.3.\quad M_b - M_a + \int_a^b H\,dy - \int_a^b V\,dx = 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

H_a, V_a, M_a силе у пресеку a

H_b, V_b, M_b силе у пресеку b.



Код ј-не (1.1)

$$dH + p_x\,dy = 0 \quad / (y_b - y), \int_a^b$$

$$\Rightarrow \int_a^b (y_b - y)\,dH + \int_a^b (y_b - y)\,p_x\,dy = 0$$

*

$$\int_a^b (y_b - y)\,dH = \int_a^b y_b\,dH - \int_a^b y\,dH = y_b(H_b - H_a) - \left[yH\Big|_a^b - \int_a^b H\,dy\right] = y_bH_b - H_a y_b - y_bH_b + y_aH_a + \int_a^b H\,dy = -H_a(y_b - y_a) + \int_a^b H\,dy$$

затим примењујемо парцијалну интеграцију *, $\Rightarrow$

$$-(y_b - y_a)H_a + \int_a^b H\,dy + \int_a^b p_x (y_b - y)\,dy = 0$$

тј.

$$\boxed{\int_a^b H\,dy = (y_b - y_a)H_a - \int_a^b p_x (y_b - y)\,dy} \qquad 3.1.$$

овим је интеграл ф-је H приказан преко p_x и силе H_a

вредност истог интеграла у ф-ји оптерећења и силе H_b добијамо код ј-ну.

Чеха

$$1.1. \; / (y - y_a), \; \int_a^b$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b H\,dy = (y_b - y_a) H_b + \int_a^b P_x (y - y_a)\,dy} \quad 3.2.$$

-вредност интеграла V добијамо интеграцијом 1.2 помножене са $(x_b - x)$ одн. $(x - x_a)$, исти начин као за

$$\int_a^b V\,dx = (x_b - x_a) V_a - \int_a^b P_y (x_b - x)\,dx \quad 3.3.$$

$$\int_a^b V\,dx = (x_b - x_a) V_b + \int_a^b P_y (x - x_a)\,dx \quad 3.4$$

Када 3.1 и 3.3, односно 3.2 и 3.4 унесемо у 1.3 ⇒

$$4.1. \quad M_b - M_a + (y_b - y_a) H_a - (x_b - x_a) V_a - \int_a^b P_x (y_b - y_a)\,dy + \int_a^b P_y (x_b - x)\,dx = 0$$

$$4.2 \quad M_b - M_a + (y_b - y_a) H_b - (x_b - x_a) V_b + \int_a^b P_x (y - y_a)\,dy - \int_a^b P_y (x - x_a)\,dx = 0 \quad (4)$$

ЗАКЉУЧАК 1:

⇒ из 1.1, 1.2 и (4) следи да су интеграли услова равнотеже елемента штапа између два произвољна пресека штапа услови равнотеже дела штапа између та два пресека.

⇒ Из ј-на (1) и (4) могу да се срачунају силе у произвољном пресеку штапа када су поред оптерећења дуж осе штапа P_x и P_y познате и силе у једном произвољном пресеку штапа, па следи и ЗАКЉУЧАК 2: равно стање штапа је потпуно одређено када су поред оптерећења дуж осе штапа познате још и силе у једном произвољном пресеку.

⇒ Код су познате силе на крају i: [СЛИКА ИЗА]

$$\left.\begin{aligned} H_i &= H_{in} \\ V_i &= V_{in} \\ M_i &= M_{in} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

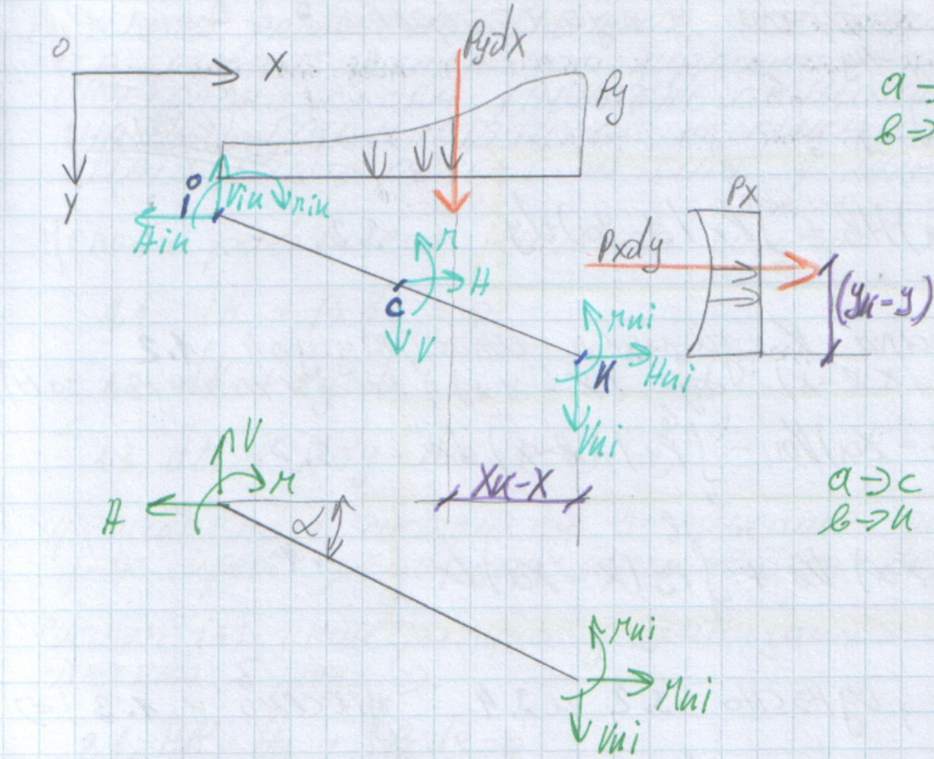
тада силе у произвољном пресеку c добијамо из услова равнотеже дела штапа ic, односно из ј-на 1.1., 1.2., 4.1, заменом индекса $\boxed{a \to i,\; b \to c}$

⇒ Код су познате силе на крају k:

$$\left.\begin{aligned} H_k &= H_{ki} \\ V_k &= V_{ki} \\ M_k &= M_{ki} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

тада силе у произвољном пресеку c добијамо из услова равнотеже дела штапа ck, односно из ј-на 1.1., 1.2, 4.2., заменом индекса $\boxed{a \to c,\; b \to k}$

PS. мора нам бити познато и оптерећење штапа!



$H_i = H_{ik}$; $H_k = H_{ki}$

$V_i = V_{ik}$; $V_k = V_{ki}$

$M_i = M_{ik}$; $M_k = M_{ki}$

$\left.\begin{array}{l} H_c = H \\ V_c = V \\ M_c = M \end{array}\right\}$ силе у произвољном пресеку штапа.

$$\left.\begin{array}{ll}
5.1. & H = H_{ik} - \int_i^c p_x\,dy \overset{или}{=} H_{ki} + \int_c^k p_x\,dy \\
5.2. & V = V_{ik} - \int_i^c p_y\,dx \overset{или}{=} V_{ki} + \int_c^k p_y\,dx \\
 & M = M_{ik} - (y_c - y_i)H_{ik} + (x_c - x_i)V_{ik} + \int_i^c p_x (y_c - y)\,dy - \int_i^c p_y (x_c - x)\,dx \\
5.3 & \boxed{\text{или}} \\
 & M = M_{ki} + (y_k - y_c)H_{ki} - (x_k - x_c)V_{ki} + \int_c^k p_x (y - y_c)\,dy - \int_c^k p_y (x - x_c)\,dx
\end{array}\right\} (5)$$

=) са дате слике и ј-на (5) =)

H, V, тј. N и T су једнаке алгебарском збиру компонената свих спољашњих сила на делу штапа лево или десно од пресека, тј. компонентама резултанте тих сила у правцу координатних оса x и y односно у правцу тангенте и нормале на осу штапа, а

M је једнак алгебарском збиру момената свих спољашњих сила на делу штапа лево или десно од пресека у односу на тежиште пресека, тј. једнак моменту резултанте тих сила у односу на тежиште пресека.

=) Из ј-на (5) могу да се срачунају силе у попречним пресецима штапа када су задате силе на једном или на другом крају штапа, или кад су задате било које 3 величине X_1, X_2, X_3, из којих могу да се одреде силе на крајевима штапа.

X_1, X_2, X_3 могу бити:
- компоненте сила у одређеним поп. пресецима штапа
- линеарне хомогене функције компоненти сила у одређеним попречним пресецима штапа.

али ми претпостављамо да су ϕ-је ($x_1 x_2 x_3$) само сила на крајевима штапа, па:

$$X_1 = X_1(H_{ik}, V_{ik}, M_{ik}, H_{ki}, V_{ki}, M_{ki}) \quad 6.1.$$
$$X_2 = X_2(H_{ik}, V_{ik}, M_{ik}, H_{ki}, V_{ki}, M_{ki}) \quad 6.2.$$
$$X_3 = X_3(H_{ik}, V_{ik}, M_{ik}, H_{ki}, V_{ki}, M_{ki}) \quad 6.3.$$
(6)

Из **1.1, 1.2, 4.1** заменом $a \to i$, $b \to k$ $\Rightarrow$

$$H_{ki} - H_{ik} + \int_i^k p_x\, dy = 0 \quad 7.1.$$
$$V_{ki} - V_{ik} + \int_i^k p_y\, dx = 0 \quad 7.2.$$
$$M_{ki} - M_{ik} + (y_k - y_i)H_{ik} - (x_k - x_i)V_{ik} - \int_i^k p_x (y_k - y)\,dy + \int_i^k p_y (x_k - x)\,dx = 0 \quad 7.3.$$
(7)

Ј-не **(6)** и **(7)** представљају систем од 6 лин. ј-на са 6 непознатих: $H_{ik}, V_{ik}, M_{ik}, H_{ki}, V_{ki}, M_{ki}$.
Код су ϕ-је X_1, X_2, X_3 међусобно независне и независне од услова равнотеже **(7)** тај систем може да се реши и силе на крајевима штапа могу да се прикажу као линеарне ф-је оптерећења и величина X_1, X_2, X_3, које називамо СТАТИЧКИ НЕЗАВИСНЕ ВЕЛИЧИНЕ ШТАПА.

Из (6) и (7) за H_{ik}, V_{ik}, M_{ik} тј H_{ki}, V_{ki}, M_{ki} ј-не (5) могу да се напишу у облику:

$$H = H_0 + X_1 H_1 + X_2 H_2 + X_3 H_3 = H_0 + \sum_{k=1}^{3} X_k H_k$$
$$V = V_0 + X_1 V_1 + X_2 V_2 + X_3 V_3 = V_0 + \sum_{k=1}^{3} X_k V_k \quad (8)$$
$$M = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 + X_3 M_3 = M_0 + \sum_{k=1}^{3} X_k M_k$$

а нормалне и трансверзалне силе

$$N = N_0 + X_1 N_1 + X_2 N_2 + X_3 N_3 = N_0 + \sum_{k=1}^{3} X_k N_k \quad (9)$$
$$T = T_0 + X_1 T_1 + X_2 T_2 + X_3 T_3 = T_0 + \sum_{k=1}^{3} T_k X_k$$

ОПШТИ ИЗРАЗИ ЗА СИЛЕ У ПРЕСЕЦИМА ШТАПА

Из (8) и (9) $\Rightarrow$

H_0, V_0, M_0 тј N_0, T_0 = силе у пресецима штапа услед датог оптер. p_x, p_y кад су све статички независне величине $X_k = 0$, $k = 1,2,3$
= СИЛЕ У ПРЕСЕЦИМА СТАЊА $\underline{X_k = 0}$

H_k, V_k, M_k тј N_k, T_k = силе у пресецима штапа оптерећеног само силама и моментима на крајевима ($p_x = p_y = 0$), $X_k = 1$, $k \neq i$ $X_i = 0$
= СИЛЕ У ПРЕСЕЦИМА СТАЊА $X_k = 1$

$\Rightarrow$

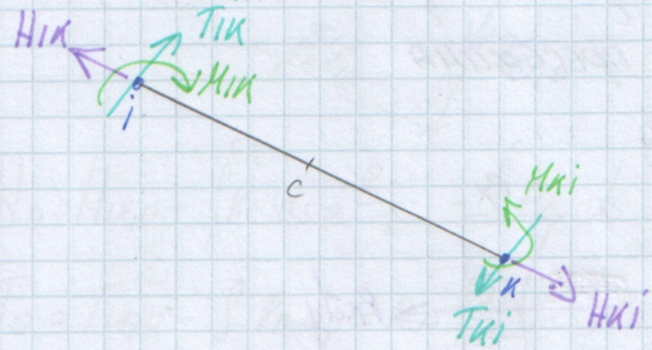
9 -ИЗВЕСТИ ИЗРАЗЕ ЗА СИЛЕ У ПРЕСЕЦИМА ШТАПА КАДА СУ СТАТИЧКИ НЕЗАВИСНЕ ВЕЛИЧИНЕ

-КОНСТРУКЦИЈА ДИЈАГРАМА У ПРЕСЕЦИМА

$X_1 = M_{ik}$

$X_2 = M_{ki}$

$X_3 = S_{ik} = \dfrac{(N_{ik}+N_{ki})}{2}$



S_{ik} - аксијална сила штапа

$X_1 = M_{ik}$

$X_2 = M_{ki}$

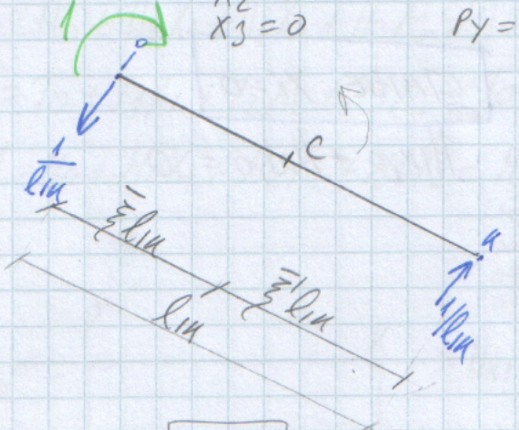
$X_3 = S_{ik} = \dfrac{N_{ik}+N_{ki}}{2}$

Примењујемо принцип суперпозиције:

I СТАЊЕ $\boxed{X_1 = 1}$

$X_2 = 0$ $\quad P_x = 0$

$X_3 = 0$ $\quad P_y = 0$



У пресеку c:

$N_1 = 0$

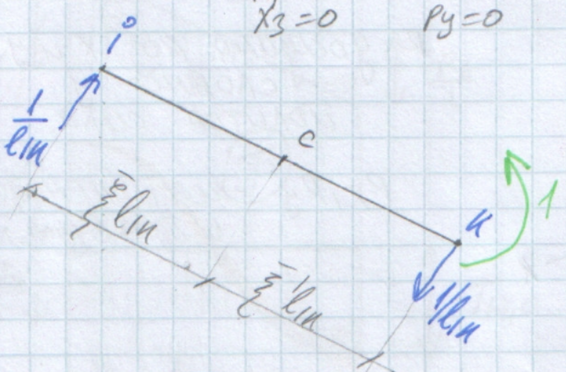
$T_1 = -\dfrac{1}{l_{ik}}$

$M_1 = \bar{\xi}'$

II СТАЊЕ $\boxed{X_2 = 1}$

$X_1 = 0$ $\quad P_x = 0$

$X_3 = 0$ $\quad P_y = 0$



У пресеку c:

$N_2 = 0$

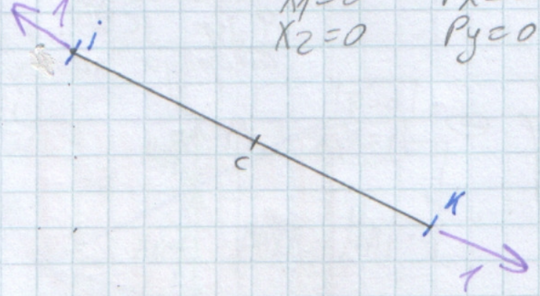
$T_2 = 1/l_{ik}$

$M_2 = \bar{\xi}$

III СТАЊЕ $\boxed{X_3 = 1}$

$X_1 = 0$ $\quad P_x = 0$

$X_2 = 0$ $\quad P_y = 0$



У пресеку c:

$N_3 = 1$

$T_1 = 0$

$M_1 = 0$

$N_{ik} + N_{ki} = 2$

$N_{ik} = N_{ki} = 1$

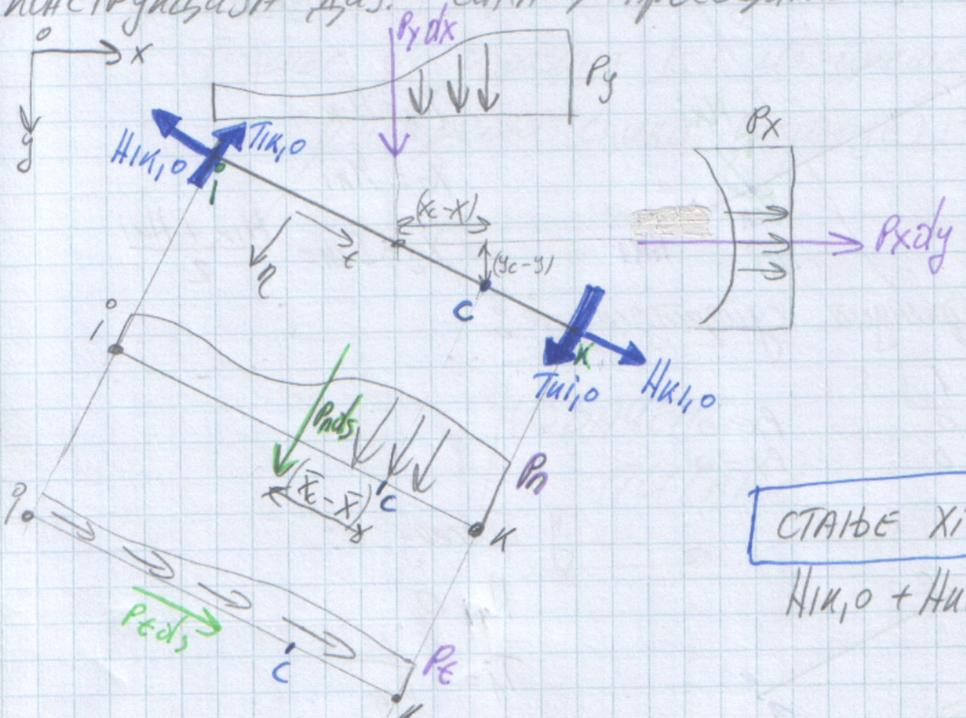
Изрази за силе у произвољном пресеку

$$N = N_1 X_1 + N_2 X_2 + N_3 X_3 + N_0 = S_{ik} + N_0$$

$$T = T_1 X_1 + T_2 X_2 + T_3 X_3 + T_0 = \frac{M_{ki} - M_{ik}}{l_{ik}} + T_0$$

$$M = M_1 X_1 + M_2 X_2 + M_3 X_3 + M_0 = \xi' \cdot M_{ik} + \xi M_{ki} + M_0$$

Конструкција диј. сила у пресецима



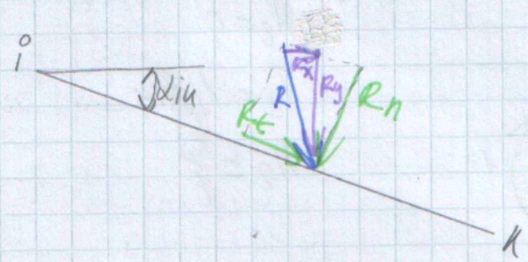
N=N0
V=V0

H0
V0
M0

$\boxed{\text{Стање } X_i = 0}$

$$H_{ik,0} + H_{ki,0} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} R_x &= \int_i^k p_x\,dy \\ R_y &= \int_i^k p_y\,dx \end{aligned}\right\} \text{резултанта}$$



R добијамо као x и y сложимо у полигон сила.

R_x, R_y - компоненте R у правцима xOy

$$R_n = R_y \cos\alpha_{ik} - R_x \sin\alpha_{ik}$$

$$R_t = R_y \sin\alpha_{ik} + R_x \cos\alpha_{ik}$$

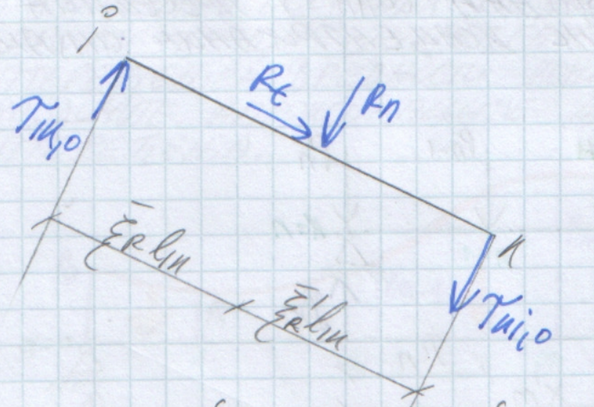
важи принцип суперпозиције јер је наша теорија линеарна

Услови: $(X_1 = S_{ik} = 0)$

$$\left.\begin{aligned} H_{ik,0} + H_{ki,0} &= 0 \\ H_{ki,0} - H_{ik,0} + R_t &= 0 \end{aligned}\right\} \ominus$$

$$2 H_{ki,0} = -R_t$$

$$H_{ki,0} = -\frac{1}{2} R_t$$



$$\Sigma M_k = 0: \quad T_{ik,0} = R_n \bar{\xi}_R'$$

$$\Sigma M_i = 0: \quad T_{ki,0} = -R_n \bar{\xi}_R$$

$$N_0 = N_{ik,0} - \int_i^c p_t \, ds = \frac{R_t}{2} - \int_i^c p_t \cdot ds$$

$$T_0 = T_{ik,0} - \int_i^c p_n \, ds = R_n \bar{\xi}_R' - \int_i^c p_n \cdot ds$$

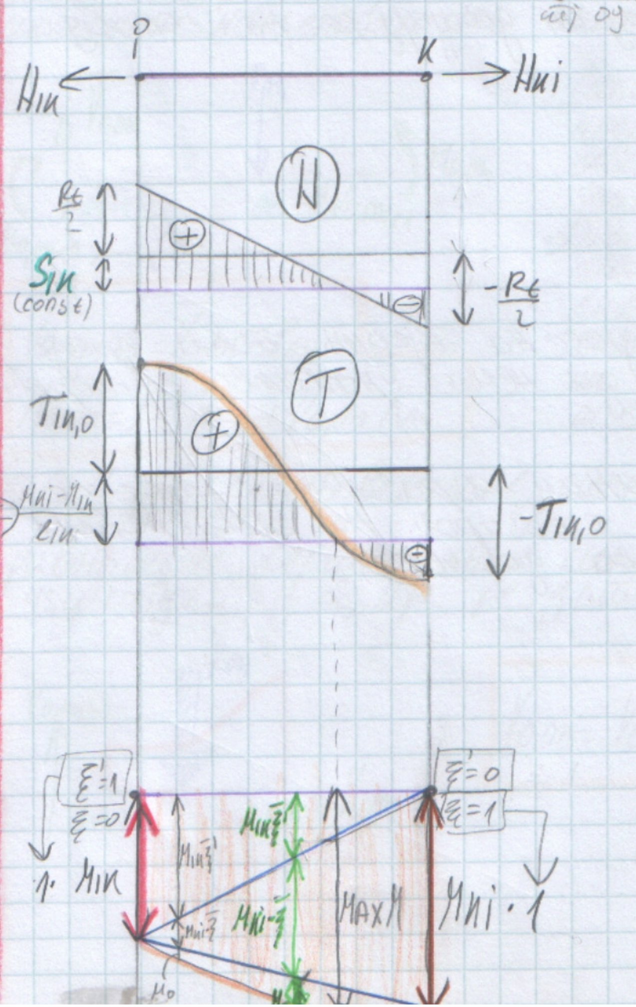
$$M_0 = T_{ik,0} \cdot \bar{\xi} \cdot l_{ik} - \int_i^c p_n (\bar{x}_c - \bar{x}) \, ds = R_n \bar{\xi}_R' \cdot \bar{\xi}_c \, l_{ik} - \int_i^c p_n (\bar{x}_c - \bar{x}) \, ds$$

$$N = N_0 + N_1 X_1 + N_2 X_2 + N_3 X_3 = N_0 + S_{ik}$$

$$T = T_0 + T_1 X_1 + T_2 X_2 + T_3 X_3 = T_0 + \frac{M_{ki} - M_{ik}}{l_{ik}}$$

$$M = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 + M_3 X_3 = \underbrace{M_0}_{\substack{\text{зависи} \\ \text{од опт.}}} + \underbrace{M_{ik} \bar{\xi}' + M_{ki} \cdot \bar{\xi}}_{\text{const}}$$

тј. од промене опт. на штапу.



$$S_{ik} = \frac{N_{ik} + N_{ki}}{2} = \text{дуж је const}$$

$$\frac{M_{ki} - M_{ik}}{l_{ik}} = \text{дуж је const}$$
(зависи од M на крајевима штапа)

→ тј. да је S_{ik} позитивно.

МАТРИЧНИ ОБЛИК

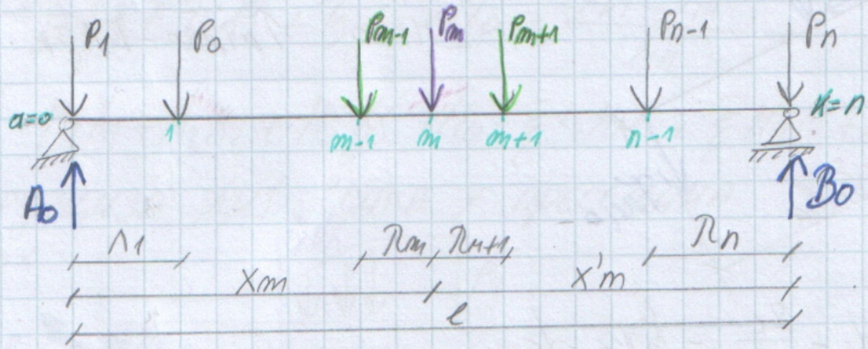
$$S = \begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ik} \\ M_{ik} \\ M_{ki} \end{bmatrix}; \quad S_0 = \begin{bmatrix} N_0 \\ T_0 \\ M_0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{S = S_0 + L \cdot X}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -\frac{1}{l_{ik}} & \frac{1}{l_{ik}} \\ & \bar{\xi}' & \bar{\xi} \end{bmatrix}$$

~~11~~ НУМЕРИЧКИ ПОСТУПАК ОДРЕЂИВАЊА СИЛА У ПРЕСЕЦИМА
10 ПРОСТЕ ГРЕДЕ ОПТЕРЕЋЕНЕ КОНЦЕНТРИСАНИМ СИЛАМА.

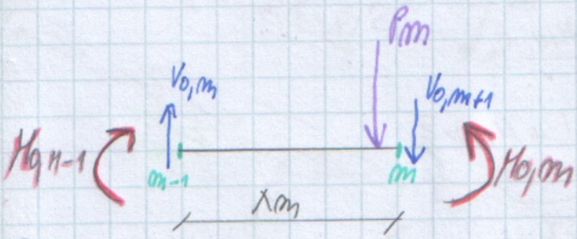
V



Изрази за реакције просте греде:

$$A_0 = \frac{1}{l}\sum_{m=0}^{n} P_m x'_m$$

$$B_0 = \frac{1}{l}\sum_{m=0}^{n} P_m x_m = \sum_{m=0}^{n} P_m - A_0 .$$



Вредности пресечних сила у чвору m добијају се на основу **рекурентних образаца**.

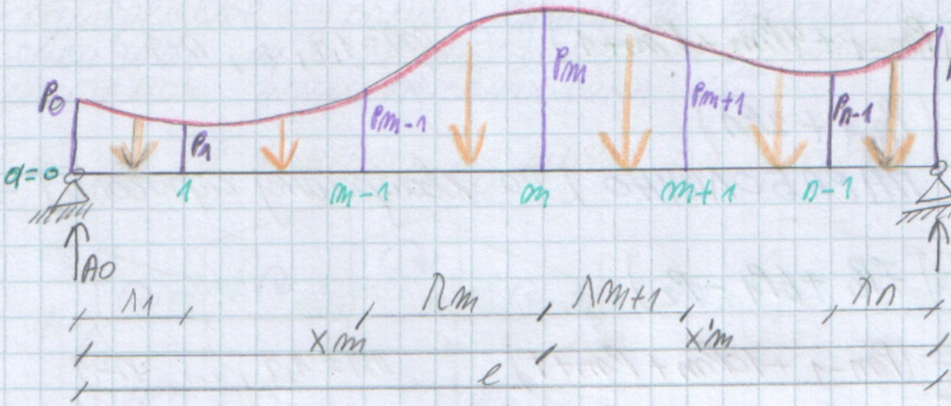
$$V_{0,m+1} = V_{0,m} - P_m$$

$$M_{0,m} = M_{0,m-1} + V_{0,m}\lambda_m$$

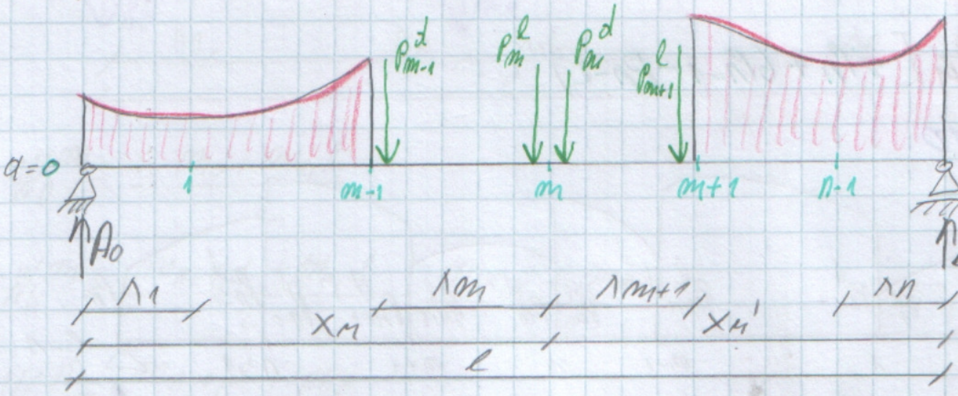
⇒ Трансверзалне силе које се односе на поједина поља греде су константне, с обзиром да нема никаквог оптерећења дуж поља.

⇒ Моменти савијања према горњим изразима односе се на чворове греде, па се с обзиром на оптерећење линеарно мењају од чвора до чвора.

(10) (11) НУМЕРИЧКИ ПОСТУПАК ОДРЕЂИВАЊА СИЛА У ПРЕСЕЦИМА ПРОСТЕ ГРЕДЕ ОПТЕРЕЋЕНЕ ПРОИЗВОЉНИМ РАСПОДЕЉЕНИМ ОПТЕРЕЋЕЊЕМ. ВРЕДНОСТИ КОНЦЕНТРИСАНИХ СИЛА ЗА РАЗЛИЧИТЕ АПРОКСИМАЦИЈЕ ДИЈАГРАМА РАСПОДЕЉЕНОГ ОПТЕРЕЋЕЊА.

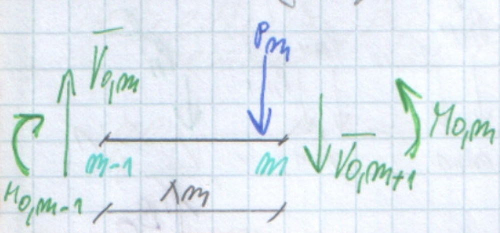


(1)



(2)

При нумеричком прорачуну реакција ослонаца и сила у пресецима расподељено оптерећење (1) замењујемо статички еквивалентним системом концентрисаних сила (2).

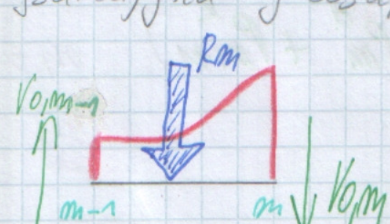


⇒ Силе одређујемо из услова да моменти савијања у чворовима од задатог оптерећења буду једнаки моментима услед сила P_m.

⇒ Пошто смо са задатог расподељеног оптерећења прешли на статички еквивалентан систем концентрисаних сила, трансверзалне силе зато не одговарају стварном већ тзв. замењујућем оптерећењу.

$$\bar{V}_{0,m+1} = \bar{V}_{0,m} - P_m$$
$$M_{0,m} = M_{0,m-1} + \bar{V}_{0,m}\lambda_m$$

⇒ Стварне трансверзалне силе одређујемо из услова равнотеже вертикалних сила за посматрану ламелу, узимајући у обзир резултанту оптерећења R_m:



$$\boxed{V_{0,m} = V_{0,m-1} - R_m}$$

* Ако претпоставимо да се оптерећење мења ЛИНЕАРНО између чворова, тада ће изрази за статички еквивалентан систем сила у чворовима гласити:

$$P_0 = \frac{\lambda}{6}(2p_0 + p_1)$$

$$P_m = \frac{\lambda}{6}(p_{m-1} + 4p_m + p_{m+1}) \qquad m = 1, 2, \dots, n-1$$

$$P_n = \frac{\lambda}{6}(p_{n-1} + 2p_n)$$

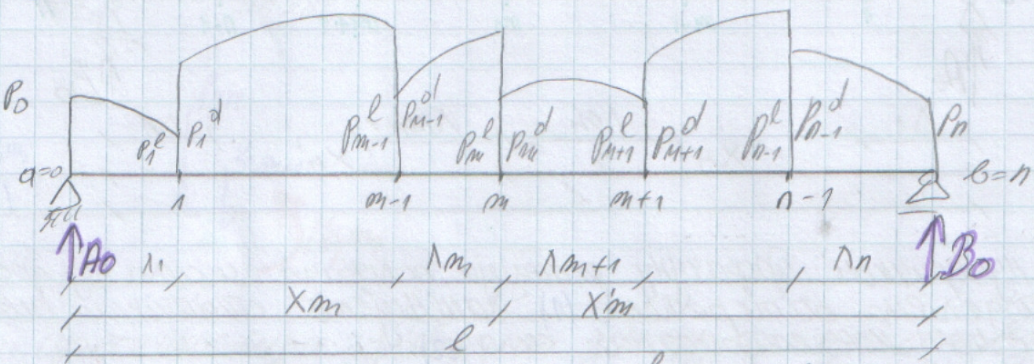
* Ако -||- ПАРАБОЛИЧНО [по квадратној параболи] -||-

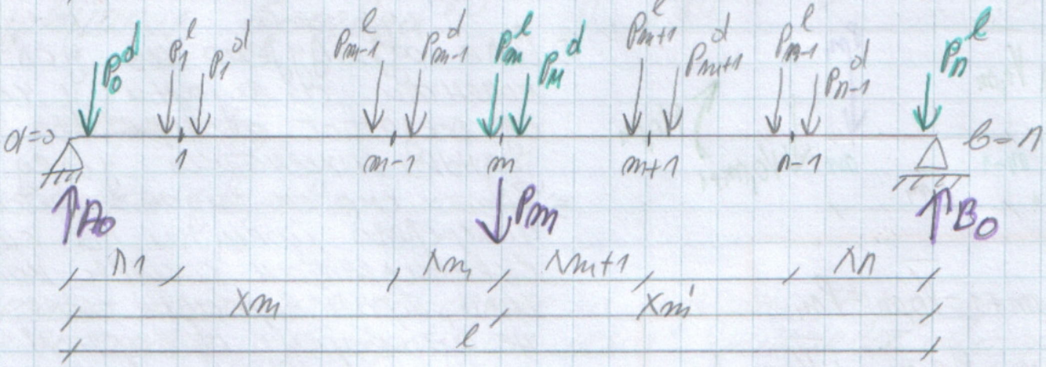
$$P_0 = \frac{\lambda}{24}\left[7p_0 + 6p_1 - p_2\right]$$

$$P_m = \frac{\lambda}{12}(p_{m-1} + 10p_m + p_{m+1}) \qquad m = 1, 2, \dots, n-1$$

$$P_n = \frac{\lambda}{24}\left[7p_n + 6p_{n-1} - p_{n-2}\right]$$

* СКОКОВИТО





У сл. о линеарној промени опт. од чвора до чвора:

$$P_0 = \frac{\lambda_1}{6}\left(2p_0^d + p_1^l\right)$$

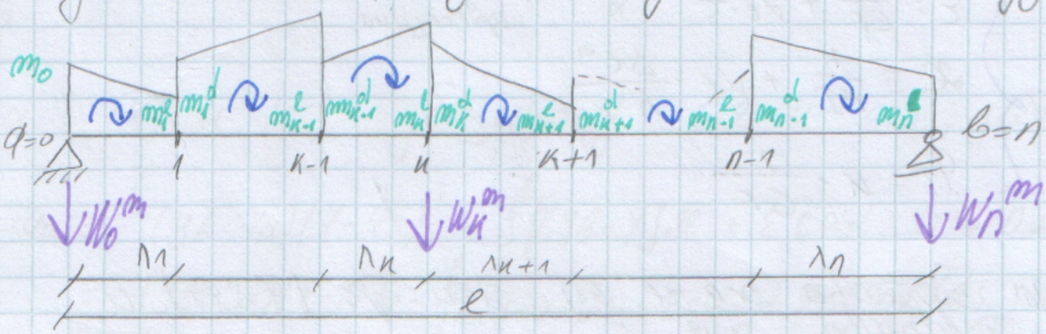
$$P_m = \frac{\lambda_m}{6}\left(p_{m-1}^d + 2p_m^l\right) + \frac{\lambda_{m+1}}{6}\left(2p_m^d + p_{m+1}^l\right) \qquad m = 1, 2, \dots, n-1$$

$$P_n = \frac{\lambda_n}{6}\left(p_{n-1}^d + 2p_n^l\right)$$

(11) (12) ОДРЕЂИВАЊЕ СИЛА У ПРЕСЕЦИМА ПРОСТЕ ГРЕДЕ ОПТЕРЕЋЕНЕ ПРОИЗВОЉНО РАСПОДЕЉЕНИМ МОМЕНТИМА НУМЕРИЧКИ ПОСТУПАК.

* оптерећење у облику СКОКОВИТО РАСПОДЕЉЕНИХ МОМЕНАТА САВИЈАЊА m ЗАМЕЊУЈЕМО еквивалентним системом КОНЦЕНТРИСАНИХ СИЛА W_k^m.

* и то да се моменти од тачке до тачке мењају линеа



$$W_0^m = -\frac{m_0 + m_{1,l}}{2}$$

$$W_k^m = \frac{m_{k-1,d} + m_{k,l}}{2} - \frac{m_{k,d} + m_{k+1,l}}{2} \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$W_n^m = \frac{m_{n-1,d} + m_n}{2}$$

⇒ када је оптерећење распоређеним моментима непрекидно, тј. кад нема скокова у дијаграму m, тежине W_k^m:

$$W_0^m = -\frac{m_0 + m_1}{2}$$

$$W_k^m = \frac{m_{k-1} - m_{k-1}}{2} \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$W_n^m = \frac{m_{n-1} + m_n}{2}$$

(14) (13) ИНТЕГРАЛИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ Ј-НА ПОМЕРАЊА ТАЧАКА ОСЕ ШТАПА. ПОМЕРАЊА ШТАПА КАО КРУТОГ ТЕЛА. ПОЈАМ ДЕФОРМАЦИЈСКИ НЕЗАВИСНИХ ВЕЛИЧИНА, ОПШТЕ РЕШЕЊЕ ЗА ПОМЕРАЊА ТАЧАКА ОСЕ ШТАПА.

ВЕЋ ПОЗНАТЕ Ј-НЕ:

1) за одређивање деформацијских величина, кад су нам познати $\underbrace{N, T, M}_{\text{силе у пресецима}}$ и $t°$ и $\Delta t°$

$$(1)\begin{cases} \varepsilon = \dfrac{N}{EF} + \alpha_t \cdot t^\circ \\ \varkappa = \dfrac{M}{EI} + \alpha_t \cdot \dfrac{\Delta t^\circ}{h} \\ \varphi_T = k \cdot \dfrac{T}{GF} \end{cases}$$

2) за обртања осе φ тј. пот. пр. $(\varphi - \varphi_T)$ и померања u, v:

$$(2)\begin{cases} d(\varphi - \varphi_T) = -\varkappa ds & 2.1. \\ du = \varepsilon dx - \varphi dy & 2.2. \\ dv = \varepsilon dy + \varphi dx & 2.3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ј-не (2) интегралимо од пресека a до пресека b.

$$(6)\begin{cases} (\varphi - \varphi_T)_a - (\varphi-\varphi_T)_b = -\int_a^b \varkappa ds \\ u_b - u_a = \int_a^b \varepsilon dx - \boxed{\int_a^b \varphi dy} = \int_a^b \varepsilon dx - \int_a^b \varphi_T dy - \int_a^b (\varphi - \varphi_T) dy \\ v_b - v_a = \int_a^b \varepsilon dy + \int_a^b \varphi dx = \int_a^b \varepsilon dy + \int_a^b \varphi_T dx + \int_a^b (\varphi - \varphi_T) dx \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{gathered} -\varphi = -\varphi + \varphi_T - \varphi_T \\ -\varphi = -\varphi_T - (\varphi - \varphi_T) \end{gathered}}$$

- индекс a означава померања и обртања пот. пр. a, (исто и b).

$\int_a^b (2.1.) \cdot (y_b - y)$ и $\int_a^b (2.1.) \cdot (y - y_a)$

$\Rightarrow$

$$(3)\begin{cases} \int_a^b (y_b - y) d(\varphi - \varphi_T) = -\int_a^b \varkappa (y_b - y) ds \\ \int_a^b (y - y_a) d(\varphi - \varphi_T) = -\int_a^b (y - y_a) \varkappa ds \end{cases}$$

парцијална интеграција (3): $\left[\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du\right]$

$$(4)\begin{cases} \int_a^b (\varphi - \varphi_T) dy = (y_b - y_a)(\varphi - \varphi_T)_a - \int_a^b (y_b - y) \varkappa ds \\ \int_a^b (\varphi - \varphi_T) dy = (y_b - y_a)(\varphi - \varphi_T)_b - \int_a^b (y - y_a) \varkappa ds \end{cases}$$

$\int_a^b (2.1)\cdot(x_b - x)$ и $\int_a^b (2.1)(x - x_a)$

⇒ парцијална интеграција ⇒

(5)
$$\begin{cases} \int_a^b (\varphi-\varphi_T)dx = (x_b-x_a)(\varphi-\varphi_T)_a - \int_a^b (x_b-x)\varkappa ds \\ \int_a^b (\varphi-\varphi_T)dx = (x_b-x_a)(\varphi-\varphi_T)_b - \int_a^b (x-x_a)\varkappa ds \end{cases}$$

Када (4) и (5) убацимо у 6.2 и 6.3, добијамо:

(7)
$$\begin{cases} u_b-u_a = -(y_b-y_a)(\varphi-\varphi_T)_a + \int_a^b [(y_b-y)\varkappa + \varepsilon\cos\alpha - \varphi_T\sin\alpha] ds \\ \quad = -(y_b-y_a)(\varphi-\varphi_T)_b - \int_a^b [(y-y_a)\varkappa - \varepsilon\cos\alpha + \varphi_T\sin\alpha] ds \\ v_b-v_a = (x_b-x_a)(\varphi-\varphi_T)_a + \int_a^b [-(x_b-x)\varkappa + \varepsilon\sin\alpha + \varphi_T\cos\alpha] ds \end{cases}$$

$$= (x_b-x_a)(\varphi-\varphi_T)_b + \int_a^b [(x-x_a)\varkappa + \varepsilon\sin\alpha + \varphi_T\cos\alpha] ds$$

-овим смо добили два израза за померања крајева посматраног интервала u_b-u_a тј. v_b-v_a, један који садржи обртање левог краја $(\varphi-\varphi_T)_a$ и други који садржи обртање десног краја $(\varphi-\varphi_T)_b$.

Када j-не (6.1) и (7) напишемо:

1) једном за интервал ic, стављајући $a \to i$, $b \to c$

и

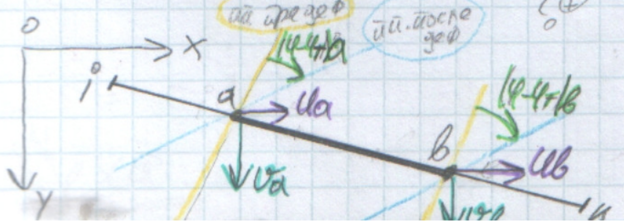
2) једном за интервал cк, стављајући $a \to c$, $b \to к$

[СЛИКА ДОЛЕ]

тада за обртање $(\varphi-\varphi_T)_c$ и померања u_c, v_c ⇒

(8)
$$\begin{cases} (\varphi-\varphi_T)_c = (\varphi-\varphi_T)_i - \int_i^c \varkappa ds = (\varphi-\varphi_T)_k + \int_c^k \varkappa ds \\ u_c = u_i - (y_c-y_i)(\varphi-\varphi_T)_i + \int_i^c [(y_c-y)\varkappa + \varepsilon\cos\alpha - \varphi_T\sin\alpha] ds = \\ \quad = u_k + (y_k-y_c)(\varphi-\varphi_T)_k + \int_c^k [(y-y_c)\varkappa - \varepsilon\cos\alpha + \varphi_T\sin\alpha] ds \\ v_c = v_i + (x_c-x_i)(\varphi-\varphi_T)_i + \int_i^c [-(x_c-x)\varkappa + \varepsilon\sin\alpha + \varphi_T\cos\alpha] ds \\ \quad = v_k \quad (x_k-x_c)(\varphi-\varphi_T)_k \ominus \int_i^c [(x-x_c)\varkappa + \varepsilon\sin\alpha \oplus \varphi_T\cos\alpha] ds \end{cases}$$

?⊕ ?⊖



-кад нема деформације штапа, онда се штап у равни помера као круто тело (креће се из једног положаја у други без икаквих деф)

самим тим $\kappa=0$
$\varepsilon=0$
$\varphi_T=0$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \varphi_c' = \varphi_i && \varphi_c'' = \varphi_k \\ &u_c' = u_i - (y_c - y_i)\varphi_i && u_c'' = u_k + (y_k - y_c)\varphi_k \\ &v_c' = v_i + (x_c - x_i)\varphi_i && v_c'' = v_k - (x_k - x_c)\varphi_k \end{aligned}\right\} (9)$$

⇒ величине φ_i, u_i, v_i тј φ_k, u_k, v_k одређују онај део померања која потичу од померања штапа као круте плоче у равни.

КРАТАК РЕЗИМЕ:

- ј-не (8) имају једноставна значења и могу се лако написати на основу геометрије. Њима одређујемо обртања пресека и померања тачака осе штапа када су познате деформацијске величине и померања и обртање левог или десног краја штапа.

- када су познате силе у пресецима N, T, M и температурне промене t° и Δt°, деформацијске величине $\kappa ds, \varepsilon ds, \varphi ds$ одређујемо из ј-на (11). Те величине одређују деформацију штапа у малом.

- Утицаји ових деформација на обртање пресека c и померање његовог тежишта дати су подинтегралним величинама у ј-нама (8)

- када те утицаје саберемо од пресека до пресека c и додамо им утицаје обртања и померања пресека i, односно када те утицаје саберемо од пресека c до пресека k и додамо им утицаје обртања и померања пресека k, за обртање и померање пресека c добијамо изразе дате ј-нама (8). При томе обртање пресека κds и обртање крајева $(\varphi-\varphi_T)_i$ тј $(\varphi-\varphi_T)_k$ улазе у израз за обртање пресека c, а помножена са одговарајућим одстојањем од тежишта пресека c у правцу y тј x-осе, заједно са одговарајућим пројекцијама померања εds и φds улазе у изразе за померања u_c и v_c.

- Из ј-на (8) могу да се одреде померања тачака и обртања пресека када су поред деформацијских величина позната и померања и обртање краја i тј φ_i, u_i, v_i, или краја k, тј φ_k, u_k, v_k, која одређују ПОМЕРАЊЕ ШТАПА КАО КРУТЕ ПЛОЧЕ У РАВНИ.

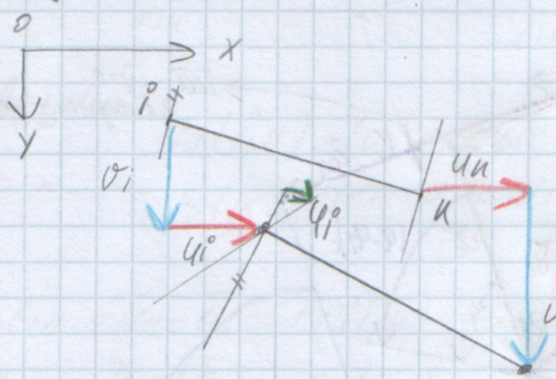
-37-

Некад, уместо померања и обртања крајева, могу да буду задате три величине које потпуно одређују померања штапа као круте плоче у равни. Обележавамо их са:

U_1, U_2, U_3 и зовемо их **ДЕФОРМАЦИЈСКИ НЕЗАВИСНЕ ВЕЛИЧИНЕ ШТАПА.**

Оне могу бити: 1) померања одређених тачака штапа
2) обртања одређених пресека
3) неке линеарне функције тих величина.

$$U_j = U_j(u_i, v_i, \varphi_i, u_k, v_k, \varphi_k) \qquad j=1,2,3. \qquad (10)$$



уз пт. да су U_j ф-је само померања и обртања крајева штапа.

* општи изрази за обртања пресека и померања тачака осе штапа могу да се напишу у облику:

$$\left.\begin{aligned}(\varphi-\varphi_T)_c &= (\varphi-\varphi_T)_{c,0} + U_1\varphi_{c,1} + U_2\varphi_{c,2} + U_3\varphi_{c,3}\\ u_c &= u_{c,0} + U_1\cdot u_{c,1} + U_2\cdot u_{c,2} + U_3\cdot u_{c,3}\\ v_c &= v_{c,0} + U_1 v_{c,1} + U_2\cdot v_{c,2} + U_3\cdot v_{c,3}\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

индекс.
0-оптер.
1,2,3-стање

где су:

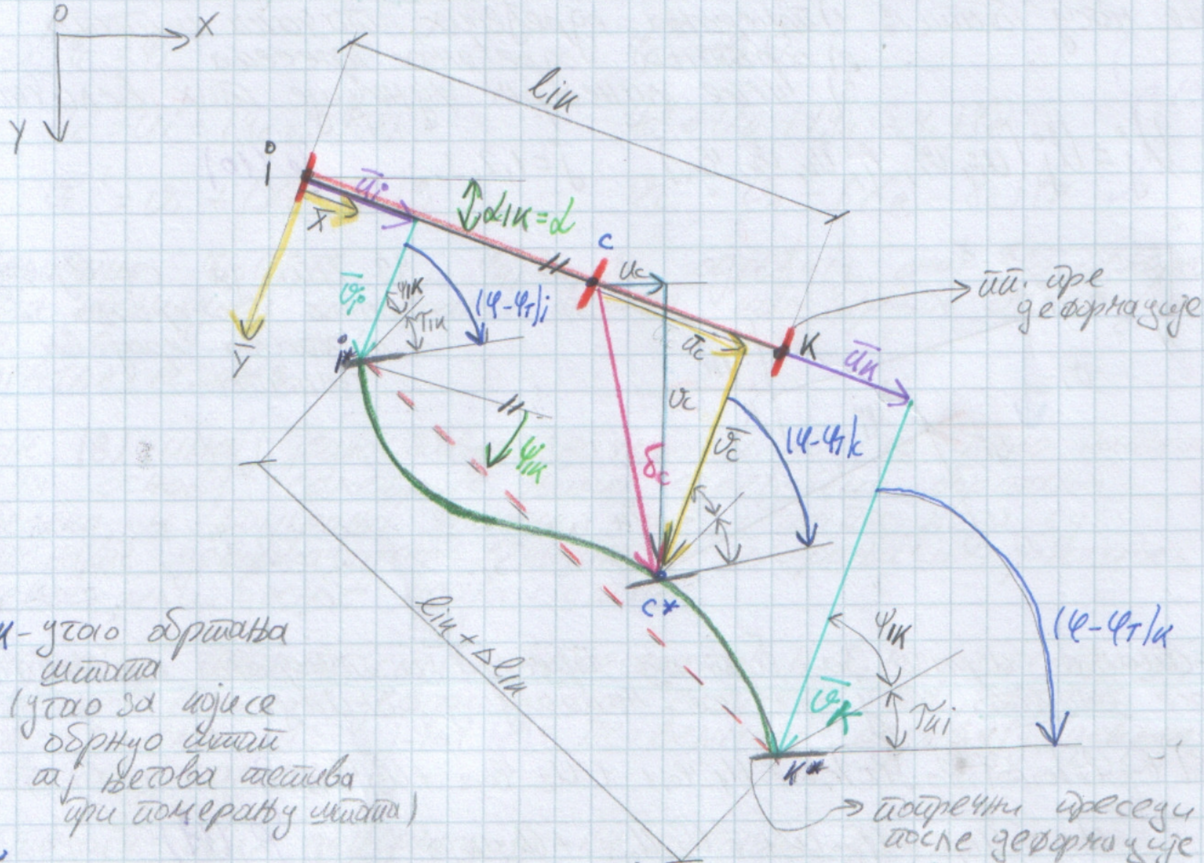
$(\varphi-\varphi_T)_{c,0}\,;\ u_{c,0}\,;\ v_{c,0}$ - ОБРТАЊА ПРЕСЕКА И ПОМЕРАЊА ТАЧАКА ОСЕ ШТАПА УСЛЕД СПОЉАШЊИХ УТИЦАЈА КАД ЈЕ $U_1=0$, $U_2=0$, $U_3=0$. Тај при стању деформације штапа које ћемо звати СТАЊЕ $U_j=0$.

$\varphi_{c,j}\,;\ u_{c,j}\,;\ v_{c,j}$ $(j=1,2,3)$ - ОБРТАЊЕ ПРЕСЕКА И ПОМЕРАЊА ТАЧАКА ОСЕ ШТАПА КАДА СЕ ОН ПОМЕРА КАО КРУТА ПЛОЧА У РАВНИ ТАКО ДА ЈЕ $U_j=1$, а друге две величине $U=0$. Стања померања штапа која одговарају вредностима $j=1,2,3$ зовемо СТАЊЕ $U_1=1$
СТАЊЕ $U_2=1$
СТАЊЕ $U_3=1$

$\boxed{U_j=1,\ U_k=0 \quad k\neq j}$

Јеха

13, 14 ИЗВЕСТИ ИЗРАЗЕ ЗА ОСНОВНЕ ДЕФОРМАЦИЈСКЕ ВЕЛИЧИНЕ ШТАПА $\Delta l_{ik}, \tau_{ik}, \tau_{ki}$ У ФУНКЦИЈИ КОМПОНЕНАТА ПОМЕРАЊА КРАЈЕВА ШТАПА И ОСНОВНИХ ДЕФОРМАЦИЈСКИХ ВЕЛИЧИНА ОСЕ ШТАПА κ, ε_1 и φ_T



ψ_{ik} - угао обртања штапа (угао за који се обрнуо штап од његова тетива при померању штапа)

τ_{ik} = деформациони угао на крају i, штапа ik. потиче од чисте деформације (тј. оптерећења) од φ_T, ε, κ. [обртање п.п. на крају i услед оптерећења]

τ_{ki} = деформациони угао на крају k, штапа ik.

Δl_{ik} - промена дужине штапа при деформацији

$\Delta l_{ik}, \tau_{ik}, \tau_{ki}$ - ДЕФОРМАЦИЈСКЕ ВЕЛИЧИНЕ (чисте) ЦЕЛОГ ШТАПА.
= једнаке су 0 кад се штап не деформише.

$\varepsilon, \kappa, \varphi_T$ - ДЕФОРМАЦИЈСКЕ ВЕЛИЧИНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНО МАЛОГ ДЕЛА ШТАПА (елемента)

ДЕФИНИЦИЈА

$$(\varphi-\varphi_T)_i = \psi_{ik} + \tau_{ik}$$

$$(\varphi-\varphi_T)_k = \psi_{ik} + \tau_{ki}$$

$$(l_{ik}+\Delta l_{ik})\cos\psi_{ik} - l_{ik} = \bar{u}_k - \bar{u}_i$$ → пројекција на правац $\bar{x}$

$$(l_{ik}+\Delta l_{ik})\sin\psi_{ik} = \bar{v}_k - \bar{v}_i$$

- важи претпоставка о малим деформацијама (и обртањима)

$\psi_{ik} \ll 1$ $\quad \cos\psi_{ik} \approx 1$
$\quad \sin\psi_{ik} \approx \psi_{ik}$

$\Delta l_{ik} \ll 1$ $\quad \psi_{ik} \cdot \Delta l_{ik} \approx 0$ (занемарљиво)

$$\Rightarrow \Delta l_{ik} = \bar{u}_k - \bar{u}_i$$
$$\psi_{ik} = \frac{\bar{v}_k - \bar{v}_i}{l_{ik}}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}_c &= u_c \cdot \cos\alpha_{ik} + v_c \sin\alpha_{ik} \\ \bar{v}_c &= v_c \cdot \cos\alpha_{ik} - u_c \sin\alpha_{ik} \end{aligned}\right\}$$

$$\Delta l_{ik} = \bar{u}_k - \bar{u}_i = (u_k - u_i)\cos\alpha_{ik} + (v_k - v_i)\sin\alpha_{ik}$$
$$\psi_{ik} = \frac{\bar{v}_k - \bar{v}_i}{l_{ik}} = \frac{(v_k - v_i)\cdot\cos\alpha_{ik} - (u_k - u_i)\cdot\sin\alpha_{ik}}{l_{ik}}$$

Уводимо:

$$F_1(i,k) = (u_k - u_i)\cos\alpha_{ik} + (v_k - v_i)\sin\alpha_{ik} = \Delta l_{ik}$$
$$F_2(i,k) = \frac{(v_k - v_i)\cos\alpha_{ik} - (u_k - u_i)\sin\alpha_{ik}}{l_{ik}} = \psi_{ik}.$$

$\Delta l_{ik} = \bar{u}_k - \bar{u}_i = F_1(i,k)$ $\Rightarrow$ промена дужине тетиве штапа може да се изрази преко померања крајева штапа у оба коорд. сист. $(xOy,\ \bar{x}O\bar{y})$ (и ψ_{ik})

$\psi_{ik} = \dfrac{\bar{v}_k - \bar{v}_i}{l_{ik}} = F_2(i,k)$

$$(\varphi - \varphi_T)_i = \psi_{ik} + \tau_{ik}$$
$$(\varphi - \varphi_T)_k = \psi_{ik} + \tau_{ki}$$

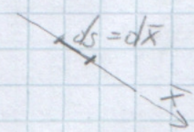
$$\Rightarrow \tau_{ik} = (\varphi - \varphi_T)_i - \psi_{ik} = (\varphi - \varphi_T)_i - F_2(i,k) = (\varphi - \varphi_T)_i - \frac{\bar{v}_k - \bar{v}_i}{l_{ik}}$$

↳ зависи да ли приказујемо преко пом. у лок. или глоб. к.с.

$$\tau_{ki} = (\varphi - \varphi_T)_k - \psi_{ik} = (\varphi - \varphi_T)_k - F_2(i,k) = (\varphi - \varphi_T)_k - \frac{\bar{v}_k - \bar{v}_i}{l_{ik}}$$

Ако знамо F_1 и F_2 (ф-је померања тачака штапа у лок. и глоб. к.с) можемо срачунати τ_{ki} и τ_{ik}.

$$\left.\begin{aligned} d\bar{u} &= \varepsilon\, d\bar{x} - \varphi\, d\bar{y} \\ d\bar{v} &= \varepsilon\, d\bar{y} + \varphi\, d\bar{x} \\ d(\varphi - \varphi_T) &= -\kappa\, ds \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} ds &= d\bar{x} \\ d\bar{y} &= 0 \end{aligned}$$



$$\left.\begin{aligned} d\bar{u} &= \varepsilon\, d\bar{x} = \varepsilon\, ds \\ d\bar{v} &= \varphi\, d\bar{x} = \varphi\, ds \\ d(\varphi - \varphi_T) &= -\kappa\, ds \end{aligned}\right\}$$ интеграција или $\int_i^c$

$$\bar{u}_c = \bar{u}_i + \int_i^c \varepsilon\, ds = \bar{u}_k - \int_c^k \varepsilon\, ds$$
$$v_c = \bar{v}_i + (\bar{x}_c - \bar{x}_i)(\varphi - \varphi_T)_i - \int_i^c \left[(\bar{x}_c - \bar{x})\kappa - \varphi_T\right] ds$$
$$= v_k - (\bar{x}_k - \bar{x}_c)(\varphi - \varphi_T)_k - \int_c^k \left[(\bar{x} - \bar{x}_c)\kappa + \varphi_T\right] ds$$
$$(\varphi - \varphi_T)_c = (\varphi - \varphi_T)_i - \int_i^c \kappa\, ds = (\varphi - \varphi_T)_k + \int_c^k \kappa\, ds$$

$\boxed{C \to K}$

$$\bar u_k - \bar u_i = \int_i^k \varepsilon \, ds = \Delta l_{ik}$$

$$\boxed{\Delta l_{ik} = \int_i^k \varepsilon \, ds}$$

промена дужине тетиве штапа, интеграл делића дилатације по дужини штапа

$$v_k - v_i = \underset{1}{\bar\xi_c}\, l_{ik} (\varphi - \varphi_T)_i - \int_i^k [\bar\xi_c'\, l_{ik}\, \varkappa - \varphi_T]\, ds$$

! уместо $(\varphi - \varphi_T)_i$ убацујемо $(\varphi_{ik} + \tau_{ik})$

$$v_k - v_i = \underset{1}{\bar\xi_c} \cdot l_{ik} (\varphi_{ik} + \tau_{ik}) - \int_i^k [\bar\xi_c' \cdot l_{ik} \cdot \varkappa - \varphi_T]\, ds \qquad / : l_{ik}$$

$$\frac{v_k - v_i}{l_{ik}} = \cancel{\varphi_{ik}} + \tau_{ik} - \frac{1}{l_{ik}} \int_i^c [\bar\xi_c'\, l_{ik} \cdot \varkappa - \varphi_T]\, ds$$

$$\boxed{\tau_{ik} = \frac{1}{l_{ik}} \int_i^c [\bar\xi_c'\, l_{ik}\, \varkappa - \varphi_T]\, ds}$$

$\boxed{C \to i}$

$$\boxed{\tau_{ki} = -\frac{1}{l_{ik}} \int_i^k [\bar\xi\, l_{ik}\, \varkappa + \varphi_T]\, ds}$$

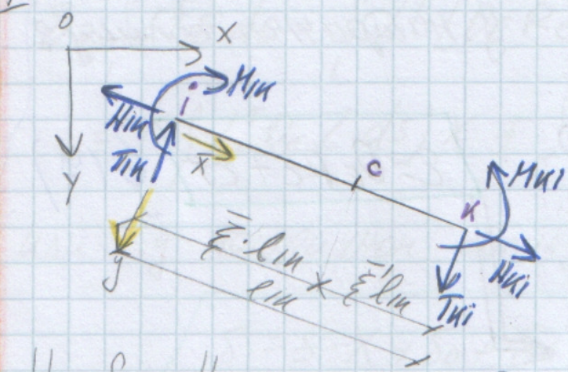
Уводимо:

$$\delta = \int_i^k L' \varepsilon \, ds$$

$$\delta = \begin{bmatrix} \Delta l_{ik} \\ \tau_{ik} \\ \tau_{ki} \end{bmatrix} \qquad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varphi_T \\ \varkappa \end{bmatrix} \qquad L' = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -\frac{1}{l_{ik}} & \bar\xi' \\ & \frac{1}{l_{ik}} & \bar\xi \end{bmatrix}$$

-41- (15) XI ИЗВЕСТИ БАЗНУ МАТРИЦУ ФЛЕКСИБИЛНОСТИ S ЗА ПРОИЗВОЉАН ПРАВ ШТАП.

I



усвојано: $X_1 = \frac{N_{ik}+N_{ki}}{2} = S_{ik}$

$X_2 = M_{ik}$

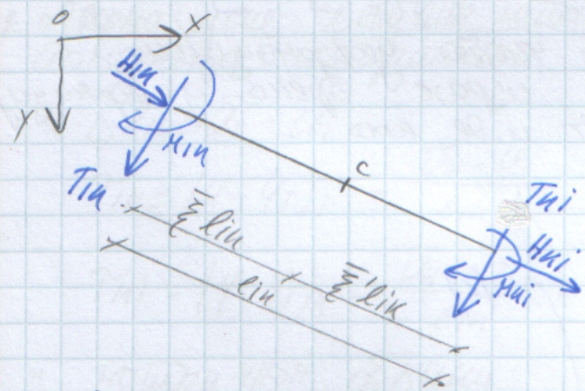
$X_3 = M_{ki}$

СТАТ. НЕЗАВИСНЕ ВЕЛИЧИНЕ

$$N = S_{ik} + N_0$$
$$T = \frac{M_{ki} - M_{ik}}{l_{ik}} + T_0$$
$$M = M_{ik}\bar{\xi}' + M_{ki}\bar{\xi} + M_0$$

силе у пресецима (1)

II можемо усвојити другу конвенцију о позитивним знацима пресечних сила, тако да се силе усвајају да су позитивне ако су у смеру оса локалног координатног система $\bar{x}$ и $\bar{y}$, док су моменти M_{ik} и M_{ki} позитивни кад су у смеру од осе $\bar{x}$ ка оси $\bar{y}$.



$X_1 = \frac{N_{ki} - N_{ik}}{2} = S_{ik}$

$X_2 = M_{ik}$

$X_3 = M_{ki}$

M_0, T_0, N_0 - лако се налазе јер су то утицаји просте греде.

$$N = S_{ik} + N_0$$
$$T = -\frac{M_{ik}+M_{ki}}{l_{ik}} + T_0$$
$$M = M_{ik}\cdot\bar{\xi}' - M_{ki}\bar{\xi} + M_0$$

(2)

Ј-не (2) се могу приказати у матричном облику као:

$$\boxed{R_c = L\cdot X + R_{c,0}} \quad (10)$$

R_c - вектор сила у пресеку c

X - вектор статички независних величина

$R_{c,0}$ - вектор сила у пресеку штапа при стању $X_i = 0$

L - матрица геометријских карактеристика штапа.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -\frac{1}{l_{ik}} & -\frac{1}{l_{ik}} \\ & \bar{\xi}' & -\bar{\xi} \end{bmatrix} \quad R_c = \begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} S_{ik} \\ M_{ik} \\ M_{ki} \end{bmatrix} \quad R_{c,0} = \begin{bmatrix} N_0 \\ T_0 \\ M_0 \end{bmatrix} \quad (3)$$